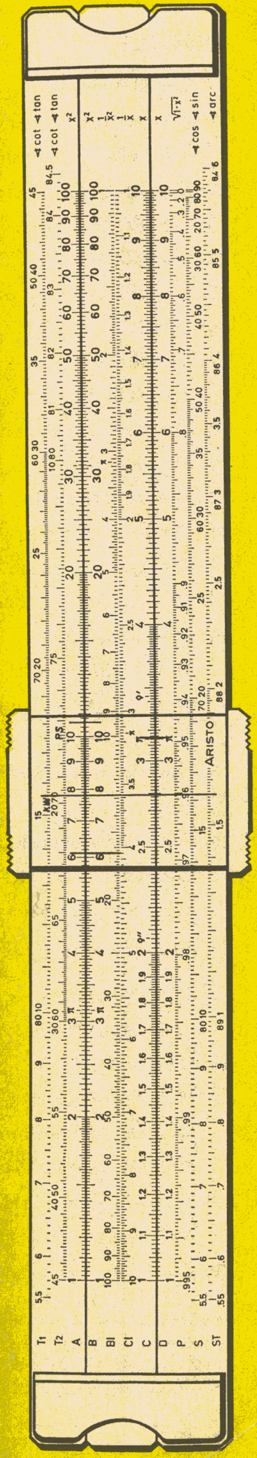
Rechnen
Zeichnen
Messen

ANLEITUNG ZUM RECHENSTAB

ARISTO

TRILOG

0908



INHALT

OA/TLT/RL • Printed in Germany by Borek KG • 9002

1. Die Skalen

1.1 Auf der Vorderseite

T1	Tangensskala für Winkel von 5,5° bis 45°	∢ tan	Auf der oberen Körperleiste
	Für Kotangens von 45° bis 84,5° rückläufig rot beziffert	∢ cot	
T2	Tangensskala für Winkel von 45° bis 84,5°	∢ tan	
	Für Kotangens von 5,5° bis 45° rückläufig rot beziffert	∢ cot	
A	Quadratskala	x^2	
B	Quadratskala	x^2	Auf der Zunge
BI	Kehrwertskala zu B	$1/x^2$	
CI	Kehrwertskala zu C	$1/x$	
C	Grundskala	x	
D	Grundskala	x	Auf der unteren Körperleiste
P	Pythagoreische Skala	$\sqrt{1-x^2}$	
S	Sinusskala für Winkel von 5,5° bis 90°, für	∢ sin	
	Kosinus von 0° bis 84,5° rückläufig rot beziffert	∢ cos	
ST	Skala für Sinus und Tangens der Winkel von 0,55° bis 6°, für Kofunktionen von 84° bis 89,45° rückläufig rot beziffert	∢ arc	

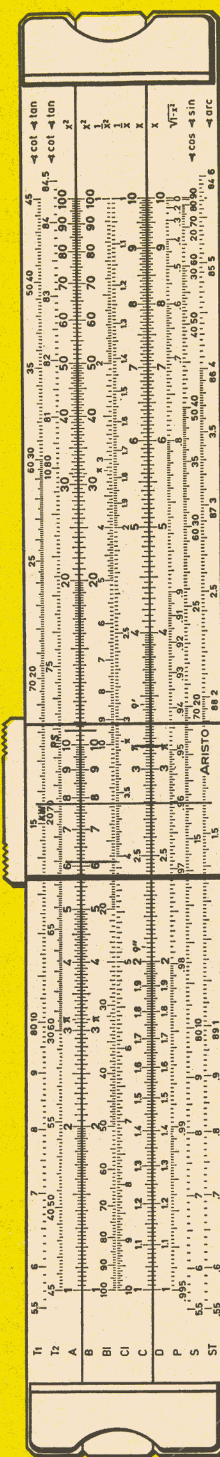


Abb. 1 Vorderseite

1.2 Auf der Rückseite

LL1	Exponentialskala, Bereich: 1,01 bis 1,11	$e^{0,01x}$	Auf der oberen Körperleiste
LL2	1,1 bis 3,0	$e^{0,1x}$	
LL3	2,5 bis 100000	e^{x}	
DF	Um π versetzte Grundskala	πx	
CF	Um π versetzte Grundskala	πx	Auf der Zunge
CIF	Kehrwertskala zu CF	$1/\pi x$	
CI	Kehrwertskala zu C	$1/x$	
C	Grundskala	x	
D	Grundskala	x	Auf der unteren Körperleiste
L	Mantissenskala	$\lg x$	
K	Kubikskala	x^3	

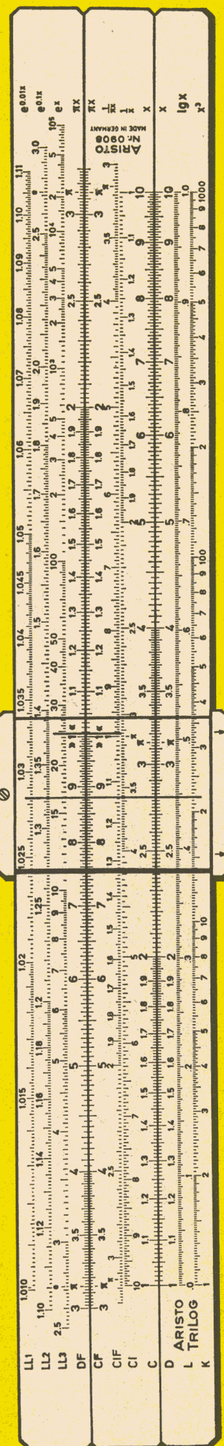


Abb. 2 Rückseite

2. Das Lesen der Skalen

Die wichtigste Vorübung für ein Rechnen mit dem Rechenstab ist das Skalenlesen. Zwar ist der Umgang mit Skalen jedem in gewisser Weise aus Schule und Praxis geläufig, aber bei den Skalen des Rechenstabes tritt doch ein wesentlicher Unterschied auf.

Im Vergleich zu dem uns geläufigen Millimeter-Maßstab sind die Abstände der Teilstriche unterschiedlich, sie werden nach einer Seite immer enger. Beim Millimeter-Maßstab haben die Teilstriche einen konstanten Abstand von einem Millimeter, jeder fünfte ist durch seine Länge hervorgehoben und jeder zehnte ist beziffert, um so das Teilungsbild übersichtlich zu gestalten. Die Bezifferung zählt also die Zentimeter.

Abb. 3 a Millimeter-Maßstab

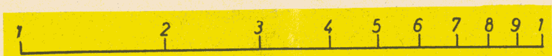


Abb. 3b Rechenstabskala

Beim Betrachten der Grundskala D des Rechenstabes fällt sofort auf, daß die einzelnen Abstände zwischen den Ziffern von 1 bis 10 verschieden groß sind. Zwischen diesen Ziffern ist jeweils durch lange Striche eine weitere Unterteilung in 10 Intervalle vorgenommen, die nochmals durch kurze Striche unterteilt sind. Zwischen den Ziffern 1 und 2 ist genügend Raum für eine Bezifferung der langen Teilstriche und für eine Zehnerunterteilung zwischen diesen bezifferten Teilstrichen, so daß ein Bild entsteht, das der obigen Millimeterskala vergleichbar ist.

Da die Intervalle nach rechts aber immer kleiner werden, kann von der 2 ab im Vergleich zur Anfangsteilung nur noch jeder zweite und rechts von der 4 nur noch jeder fünfte Teilstrich markiert werden.

Besonders zu beachten ist, daß die Ablesungen beim Rechenstab Ziffernfolgen sind, die nichts über den Stellenwert aussagen, d. h. man liest bei 132 Eins—Drei—Zwei und nicht Einhundertzweiunddreißig. Diese Sprechweise schützt vor Fehlern, weil eine Vertauschung oder ein Auslassen von Ziffern vermieden wird. Der Teilstrich für die Ziffernfolge 1—3—2 kann z.B. als 0,132 oder 13,2 gelesen werden, weil durch eine Multiplikation oder Division mit Zehnerpotenzen nur die Kommastellung, nicht aber die Ziffernfolge geändert wird.

Die erste Stelle einer Zahl wird durch die großen Ziffern der Skala leicht gefunden, das Aufsuchen der nächsten Stellen ist in den drei vorkommenden Teilungsbildern unterschiedlich.

Im Bereich von 1 bis 2 gibt die etwas kleinere Bezifferung die ersten beiden Stellen einer Zahl an, z. B. 13. An den kurzen Teilstrichen wird die dritte Stelle abgezählt. Mit 130 bei der Zahl 1.3 beginnend werden die folgenden

Teilstriche nach rechts fortschreitend 131, 132, 133 usw. gelesen.

Abb. 4 Ablesung im Bereich von 1 bis 2

Der Läuferstrich ist im Vergleich zur Breite des Intervalls so dünn, daß man die Mitte zwischen zwei Teilstrichen sicher einstellen kann. Das Auge kann aber auch kleine Bruchteile eines Intervalls unterscheiden, so daß man bei einiger Übung auch den zehnten Teil des Intervalls schätzen kann, wie z. B. die Zehntelmillimeter in einer Millimeterskala.

Beim Verschieben des Läufers zwischen den Teilstrichen 138 und 139 lassen sich beispielsweise die Werte 1380, 1381, 1382, 1383 usw. schätzen.

Im Bereich von 2 bis 4 wird nur die erste Stelle einer Zahl durch die Bezifferung angegeben, die zweite Stelle wird an den längeren Teilstrichen abgezählt, wie die ein-

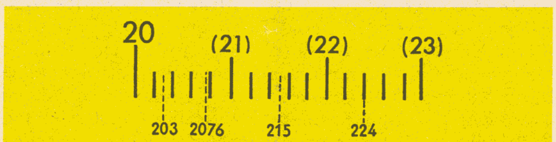


Abb. 5 Ablesung im Bereich von 2 bis 4

geklammerten Zahlen in Abb. 5 zeigen. Die dazwischen liegenden kurzen Teilstriche führen jeweils um zwei Einheiten in der dritten Stelle weiter, z. B. 220, 222, 224, 226, 228 und 230. Diese dritte Stelle ist immer eine gerade Zahl, die ungeraden Werte liegen in der Mitte der Intervalle und werden durch Schätzung gefunden, z. B. 215.

Im Bereich der von 4 bis 10 bezifferten Teilstriche wird die zweite Stelle wieder an den langen Teilstrichen abgezählt. Die kurzen Teilstriche geben jeweils die 5 der dritten Stelle, so daß die Ablesefolge in diesem Bereich 500, 505, 510, 515 usw. lautet. Alle anderen Werte der dritten Stelle werden in den Intervallen geschätzt.

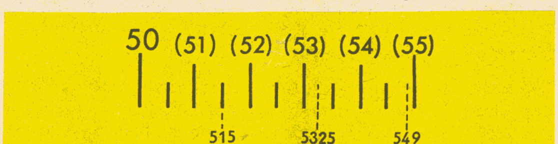


Abb. 6 Ablesung im Bereich von 4 bis 10

Die Ablesungen zwischen 1 und 1,1 sowie in den Intervallen unmittelbar hinter jedem bezifferten Teilstrich sind besonders zu üben, es darf keine Null vergessen werden.

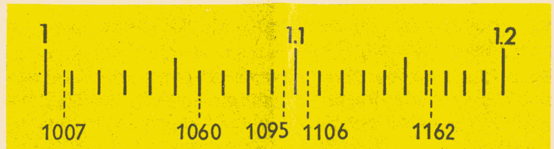


Abb. 7 Beachten der Nullen

In allen Skalen des Rechenstabes kommen nur diese drei Teilungsbilder vor, so daß man jede Skala lesen kann, wenn das Ablesen und Einstellen in der Skala D genügend geübt worden ist. Es wird empfohlen, zuerst mit dem Läuferstrich und dann auch mit dem Skalenanfang 1 oder mit dem Skalenende 10 der Skala C eine ausreichende Anzahl von Werten in Skala D einzustellen oder abzulesen.

Es hat sich als praktisch erwiesen, anschließend an diese Übung sowohl in den Skalen CF und DF als auch in den Skalen A und B Ableseübungen vorzunehmen. Hier kommen die gleichen Unterteilungen nur in anderer Reihenfolge vor.

3. Das Rechenprinzip

Gerechnet wird derart, daß Strecken graphisch addiert oder subtrahiert werden. Auf einfachste Weise kann die Rechenmethode an Hand zweier gegeneinander verschiebbarer Millimetermaßstäbe erklärt werden.

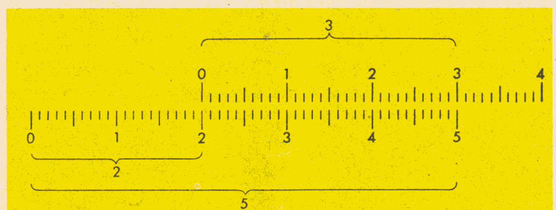


Abb. 8 Graphische Addition mit Maßstäben

Abb. 8 zeigt die Addition von 2 cm + 3 cm = 5 cm. Wenn der Anfang des oberen Maßstabes über den Wert 2 des unteren Maßstabes gelegt wird, kann zu dieser eingestellten Strecke 2 mit Hilfe der oberen Skala die Strecke 3 addiert werden. Unter der 3 des oberen Maßstabes steht das Ergebnis 5 im unteren Maßstab. In Abb. 8 könnte ebenfalls abgelesen werden $2 + 1 = 3$ oder $2 + 2 = 4$, auch $20 + 15 = 35$, wenn die Millimeter abgezählt werden.

Die Subtraktion $5 - 3 = 2$ läßt sich aus Abb. 8 gleichfalls ablesen, der Vorgang wird dann nur umgekehrt. Von der Strecke 5 der unteren Skala wird die Strecke 3 der oberen Skala abgezogen, dazu werden die Werte 5 und 3 übereinandergestellt, und unter dem Anfang der oberen Skala steht das Ergebnis 2 in der unteren Skala.

Beim Rechenstab befinden sich die Teilungen auf einem festen Körper und auf einer darin verschiebbaren Zunge. Die Eigenart des Rechenstabes liegt darin, daß logarithmisch geteilte Skalen aufgetragen sind. Die Addition zweier Strecken gibt damit eine Multiplikation, und die Subtraktion wird zur Division.

Beim Einstellen der Zahlenwerte wird auf die Kommastellung keinerlei Rücksicht genommen, erst im Ergebnis wird das Komma auf Grund einer Überschlagsrechnung eingesetzt.

4. Multiplikation

Zwei Strecken der Rechenstabskalen werden addiert.

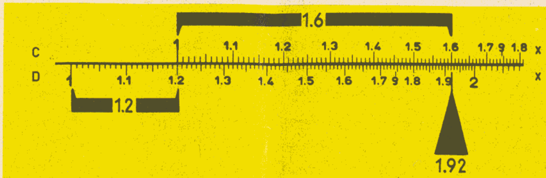


Abb. 9 1,2 · 1,6 = 1,92

Zunächst wird nur mit den Skalen C und D gerechnet. Die Strecke von 1 bis 1,2 auf Skala D und die Strecke von 1 bis 1,6 der Skala C werden durch Aneinanderreihung graphisch addiert, indem die 1 der Skala C über die 1,2 der Skala D gestellt und der Läuferstrich über den Wert 1,6 in Skala C gebracht wird, wo in Skala D das Ergebnis 1,92 abgelesen wird. Die schwarzen Balken der Abb. 9 verdeutlichen die beiden Strecken und die Keilspitze zeigt das Ergebnis an. Die Kommastellung ergibt sich aus einer Überschlagsrechnung, etwa 1 · 2 = 2.

Übungsbeispiele:	18 · 13 = 234	2,1 · 2,5 = 5,25
	12 · 8 = 96	27,4 · 3,34 = 91,5

Wenn bei dem folgenden Beispiel 8 · 7 = 56 der in Abb. 9 angegebene Weg nicht zum Ziele führt, weil die Zunge so weit aus dem Rechenstab herausgezogen werden muß, daß die Skala D für die Ablesung des Ergebnisses nicht ausreicht, dann wird der Wert 8 mit dem rechten Ende 10 der Skala C eingestellt.

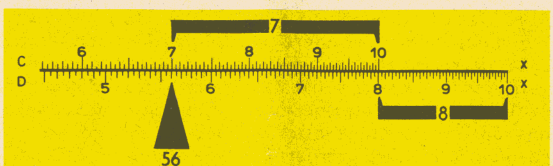


Abb. 10 8 · 7 = 56

Jetzt ragt der Anfang der Skala C aus dem Rechenstab heraus, er würde jedoch in einer nach links angetragenen zweiten Grundskala gleichfalls den Wert 8 anzeigen. Deshalb ändert sich am Prinzip der Rechnung nichts, weil zu diesem nur vorgestellten Wert die Strecke 7 addiert wird und in Skala D das Ergebnis 56 abgelesen werden kann. Diese Methode der Vertauschung von Zungenanfang und -ende heißt „Durchschieben der Zunge", ein Verfahren, das immer zum Ziel führt, wenn man beim Rechnen über den Bereich der D-Skala hinauskommt.

Die schwarzen Balken in Abb. 10 und ihre Bezifferung geben keine völlig korrekte Darstellung des Rechenvorganges, weil sie nur die Reststücke bis zur Zahl 10 veranschaulichen; aber sie zeigen die tatsächliche Einstellung und das Ergebnis deutlicher an als eine von den Skalenanfängen ausgehende Darstellungsweise.
Um eine bessere Vorstellung von dieser Methode zu haben, ist es ratsam, die gleiche Aufgabe mit den Skalen A und B zu rechnen.
Da in den Skalen A und B zwei gleiche Skalen nebeneinander angeordnet sind, wird beim Multiplizieren mit diesen Skalen das Durchschieben der Zunge nicht vorkommen. Wenn die 1 der Skala B in diesem Falle unter die 8 im linken Teil der Skala A gestellt wird, muß die 10 der Skala B gleichfalls unter der 8 im rechten Teil der Skala A stehen. Wird jetzt der Läufer vom Anfang der Skala B nach rechts zum Wert 7 geschoben, dann überschreitet er die 10 der Skala A und im rechten Teil dieser Skala wird das Ergebnis 56 abgelesen. Umgekehrt kann man den Läufer auch von der 10 der Skala B nach links zum Wert 7 schieben und erhält dann wieder die gleiche Läuferstellung mit dem gleichen Ergebnis. Diese Einstellung entspricht dann dem in Abb. 10 mit den Skalen D und C dargestellten Vorgang.

Übungsbeispiele:	9,2 · 6,85 = 63,0	6,4 · 37,2 = 238
	31,6 · 5,35 = 169,0	39,7 · 49,5 = 1965

5. Multiplikation mit den Skalen CF und DF

Die Skalen CF und DF haben im Grunde die gleichen Eigenschaften wie die Skalen C und D mit dem einen Unterschied, daß sie seitlich gegen die Grundskalen verschoben sind. Die 1 rückt dabei ungefähr in die Mitte des Stabes und ist zugleich Anfang und Ende der Skala. Rechts von der 1 wiederholt sich der Anfang der Grundskalen und der Teil links der 1 entspricht dem Ende der Grundskalen. Aus zwei aufeinanderfolgenden Grundskalen ist sozusagen der mittlere Teil herausgeschnitten und über den Grundskalen angeordnet worden.
Das Beispiel 1,2 · 1,6 der Abb. 9 kann selbstverständlich auch mit den Skalen CF und DF gerechnet werden, indem die 1 der Skala CF unter die 1,2 der Skala DF gestellt und über 1,6 der Skala CF das Ergebnis 1,92 auf DF abgelesen wird. Als erstes wird deutlich, daß damit auch der Anfang von Skala C über 1,2 in D steht, d. h. wir haben dieselbe Zungenstellung wie in Abb. 9.

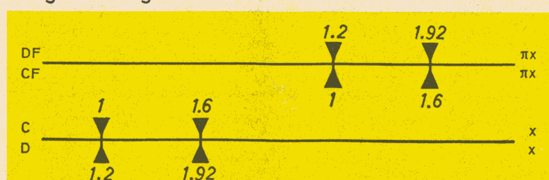


Abb. 11 Gleiche Ablesungen in den Skalen C/D und CF/DF

Zweitens kann das Ergebnis der Multiplikation 1,2 · 1,6 = 1,92 sowohl mit den Skalen C und D als auch mit CF und DF berechnet werden. Dabei ist nur zu beachten, daß die Zungenskala C über der Skala D, die Zungen-

skala CF dagegen unter DF steht. Um Einstellfehler zu vermeiden, sind die Skalen C und CF gelb gefärbt.
Verfolgen wir in dieser Zungenstellung die Skalen C/D einerseits und die Skalen CF/DF andererseits, so stellen wir fest, daß sich in beiden Skalenpaaren weitgehend die gleichen Wertepaare gegenüberstehen. Wenn die Ablesemöglichkeit in einem Skalenpaar endet, können wir im anderen Skalenpaar weiterrechnen. Das ist immer möglich, solange die Zunge nicht über die Hälfte aus dem Rechenstab hinausgezogen wird. Da bei den versetzten Skalen die 1 nur einmal in der Mitte vorkommt, wird beim Beginn der Rechnung mit den Skalen CF und DF immer von selbst die richtige Einstellung vorgenommen.
Eine Wiederholung des Beispiels 8 · 7 mit den Skalen CF und DF erläutert diesen Vorgang.

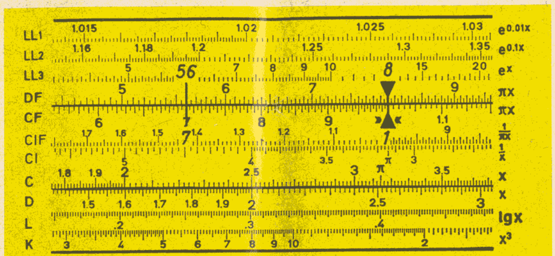


Abb. 12 8 · 7 = 56

Das gemeinsame Rechnen mit den Grundskalen C/D und mit den versetzten Skalen CF/DF bringt besondere Vorteile beim Tabellenrechnen, wenn ein konstanter Wert mit verschiedenen Faktoren multipliziert werden soll. Beispiel: Der Meterpreis eines Stoffes ist mit DM 2,86 gegeben, es soll eine Preistabelle für diverse Längen aufgestellt werden.
Es bleibt sich gleich, ob die 1 der Skala C über den Wert 2,86 in Skala D oder die 1 der Skala CF unter 2,86 in Skala DF eingestellt wird. Die Stellung der Zunge ist beide Male die gleiche. Abb. 13 zeigt einen Ausschnitt des Rechenstabes; einige Beispiele sind durch Striche und Werte markiert.

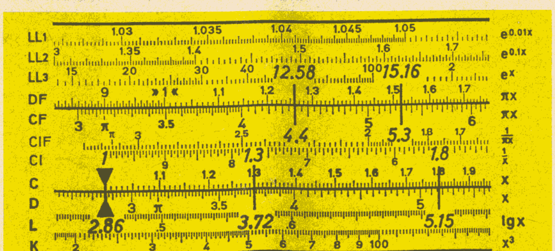


Abb. 13 2,86 · 1,3 = 3,72 2,86 · 4,4 = 12,58
2,86 · 1,8 = 5,15 2,86 · 5,3 = 15,16

Die Faktoren 1,3 und 1,8 können in Skala C eingestellt werden, darunter stehen in Skala D die Preise 3,72 und 5,15. Für Längen über 3,5 m können in Skala D keine Preise abgelesen werden, deshalb suchen wir den Wert 4,4 in Skala CF auf und lesen den Preis in Skala DF ab. Das

gleiche gilt für den Faktor 5,3. Es ist zu beachten, daß die Längen bei dieser Einstellung grundsätzlich in einer Zungenskala eingestellt werden sollen. Die gelben Streifen auf der Zunge erinnern an die richtige Einstellung der Faktoren, weil alle Faktoren auf der Zungenskala eingestellt werden.

6. Division

Bei der Division werden zwei Strecken subtrahiert (Umkehrung der Multiplikation).

Abb. 14 $\frac{1,92}{1,6} = 1,2$

Aufgaben der Division werden zweckmäßig als Bruch geschrieben. Der Zähler in D und der Nenner in C werden einander gegenübergestellt und das Ergebnis entweder gegenüber dem Zungenanfang oder dem Zungenende in Skala D abgelesen, je nachdem, welche Zungeneins gerade im Bereich der Skala D liegt.
Im Beispiel der Abb. 14 wird der Läuferstrich auf den Wert 1,92 in Skala D gestellt und die Zunge verschoben, bis der Wert 1,6 der Skala C unter dem Läuferstrich steht. Dann kann das Ergebnis 1,2 unter der Zungeneins (Keilspitze) abgelesen werden.
Abb. 15 zeigt die entsprechende Lösung der Aufgabe 18,7 : 13,9 mit den Skalen CF und DF. 18,7 in DF und 13,9 in CF werden übereinandergestellt und das Ergebnis 1,345 steht gegenüber der Zungeneins von Skala CF in Skala DF.

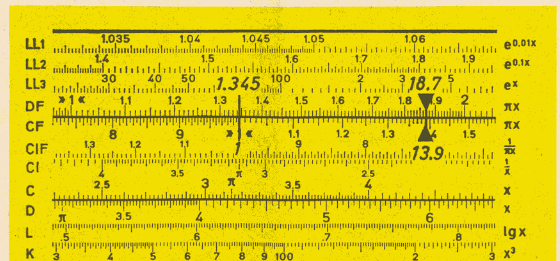


Abb. 15 $\frac{18,7}{13,9} = 1,345$

Die Division mit den Skalen CF und DF bringt den Vorteil, daß der Zähler wie bei der Bruchschreibweise oben in Skala DF und der Nenner darunter in CF eingestellt wird. Das Ergebnis steht sowohl in Skala DF als auch in D gegenüber der entsprechenden 1 in CF bzw. C.

Übungsbeispiele: 894 : 31 = 28,84 42 : 53 = 0,7925

7. Vereinigte Multiplikation und Division

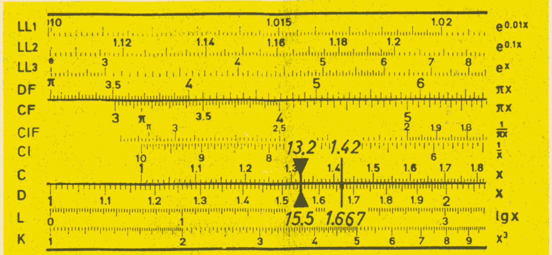


Abb. 16 $\frac{15{,}5}{13{,}2} \cdot 1{,}42 = 1{,}667$

Grundsatz: Zuerst dividieren, dann multiplizieren ohne Ablesen des Zwischenergebnisses. Nach der Division steht die Zunge immer in der Ausgangsstellung für eine anschließende Multiplikation.

Abb. 16 zeigt ein Beispiel für das Rechnen mit den Skalen C und D. Nach den Regeln für die Division werden die Werte 15,5 in D und 13,2 in C einander gegenübergestellt. Unter der Zungeneins steht in Skala D das Zwischenergebnis 1,174. Dieser Wert soll mit dem Faktor 1,42 multipliziert werden. Da die Zunge bereits in ihrer Multiplikationsstellung steht, braucht der Läufer nur noch zum Faktor 1,42 in Skala C gebracht zu werden. Darunter steht in D das Ergebnis 1,667.

Einen entsprechenden Rechengang mit den versetzten Skalen zeigt Abb. 17. Die Pfeile geben die Einstellung der Division 6,5 : 8,75 mit den Skalen DF und CF. Der Läufer ist anschließend zum Wert 5,45 in Skala CF gebracht, wo das Ergebnis 4,05 in Skala DF abgelesen wird.

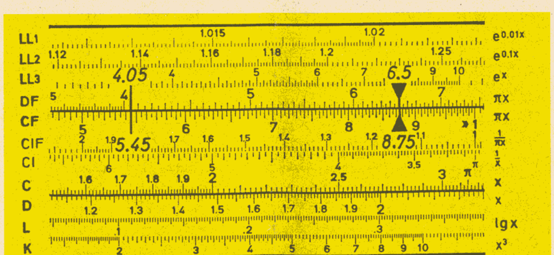


Abb. 17 $\frac{6{,}5}{8{,}75} \cdot 5{,}45 = 4{,}05$

Wird dieses Beispiel durch einen im Nenner stehenden Faktor 7,3 erweitert,

$$\frac{6{,}5 \cdot 5{,}45}{8{,}75 \cdot 7{,}3} = 0{,}555$$

kann anschließend an die Lösung in Abb. 17 dividiert werden, indem der Wert 7,3 der Skala CF unter den Läuferstrich gebracht wird, so daß 4,05 durch 7,3 geteilt wird. Stehen bei derartigen Aufgaben weitere Faktoren

im Zähler und Nenner, wird einfach abwechselnd dividiert und multipliziert. Die rhythmische Abwechslung von Zungen- und Läufereinstellungen sorgt für einen gleichbleibenden Fluß der Rechnung mit einem Minimum von Einstellungen.

Es kann bei derartigen Aufgaben vorkommen, daß die Zunge nach der Division zu weit aus dem Rechenstab herausragt und die Zunge vor der Multiplikation durchgeschoben werden muß. Durch die richtige Wahl der Divisionseinstellung mit C/D oder CF/DF läßt sich dieser Sonderfall oft vermeiden.

7.1 Multiplikation und Division mit dem Faktor π

Bei den Skalen CF und DF ist das Maß der Versetzung gegenüber den Grundskalen so gewählt, daß sich der Wert π dieser Skalen genau über dem Anfang und Ende der Grundskalen befindet. Dadurch wird beim Übergang von D nach DF bzw. C nach CF eine Multiplikation und in der umgekehrten Richtung eine Division mit π ausgeführt. Wird der Läufer z. B. auf 7 in Skala D gestellt, kann unmittelbar darüber in DF das Produkt $7 \cdot \pi = 22$ abgelesen werden. In der umgekehrten Ableserichtung wird durch π geteilt: $22 : \pi = 7$.

8. Die Kehrwertskalen CI und CIF

Die Skala CI ist genauso unterteilt wie die Grundskalen C und D, mit dem Unterschied, daß sie in der umgekehrten Richtung von rechts nach links verläuft. Zum Schutz gegen Ablesefehler ist sie rot beziffert.

Wird der Läufer auf irgend einen Wert x in Skala C gestellt, kann sein Kehrwert 1/x in CI abgelesen werden, wie die Skalenbezeichnung am rechten Rand angibt. Wichtiger ist aber, daß die Kehrwertbildung auch für die umgekehrte Richtung gilt, beim Übergang von CI nach C. Über 5 in C steht $0{,}2 = 1/5$ in CI, oder unter 4 in CI steht $0{,}25 = 1/4$ in C.

Ein nur gelegentliches Ablesen von Kehrwerten würde das Vorhandensein der Skala CI nicht rechtfertigen. Ihr Hauptwert liegt darin, daß sie viel unnötige Einstellarbeit bei zusammengesetzten Aufgaben erspart.

$\frac{4}{5}$ kann auch als $4 \cdot \frac{1}{5}$ geschrieben werden und

$4 \cdot 5$ ist das gleiche wie $\frac{4}{1/5}$.

Diese Schreibweise ist zwar ungewohnt, hat aber für das Stabrechnen den Vorteil, daß eine Division in eine Multiplikation und umgekehrt eine Multiplikation in eine Division umgewandelt wird. Ein „Spiel" mit einfachen Zahlen wird uns den Wert der Skala CI am besten zeigen:

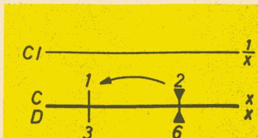


Abb. 18a

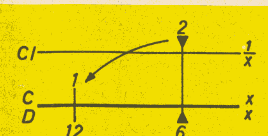


Abb. 18b

1. Bringen wir den Läufer auf 6 in D und schieben 2 in C unter den Läuferstrich, dann haben wir die übliche Division $6:2 = 3$. Lassen wir aber den Läufer stehen und bringen durch Verschieben der Zunge die 2 der Skala CI darunter, dann erhalten wir die Multiplikation $6 \cdot 2$, wobei wir das Ergebnis 12 wie bei einer Division unter der Zungeneins ablesen. In Wirklichkeit haben wir $6:0,5 = 12$ ausgerechnet, weil mit der 2 in CI gleichzeitig der Kehrwert 0,5 in C unter den Läuferstrich gebracht wurde (Abb. 18b).

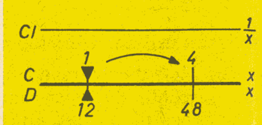


Abb. 19a

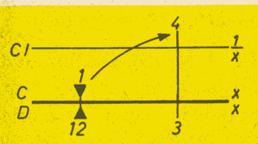


Abb. 19b

2. Lassen wir jetzt die Eins der Skala C über 12 in D stehen und bringen den Läufer auf 4 in C, dann erhalten wir die übliche Multiplikation $12 \cdot 4 = 48$. Verschieben wir aber den Läufer nach 4 in CI, so lesen wir das Ergebnis der Division $12:4 = 3$ in D ab. Mit anderen Worten: Da unter 4 in CI der Kehrwert $0,25 = 1/4$ in C steht, ist in Wirklichkeit $12 \cdot 0,25 = 3$ gerechnet worden.

Es gibt für die Multiplikation und Division also je zwei Einstellmöglichkeiten, von denen sich der geübte Rechner jeweils die bessere aussucht, um bei zusammengesetzten Aufgaben den in Kap. 7 geschilderten Rechenrhythmus der abwechselnden Division und Multiplikation zu erhalten.

Die bisher zwischen den Skalen C und CI geschilderten Beziehungen gelten in gleicher Weise auch für die Skalen CF und CIF. Um das zu begreifen, lohnt es sich, dasselbe „Zahlenspiel" mit der Skalengruppe CF/DF/CIF zu wiederholen. Wer die vorhergehenden Kapitel aufmerksam studiert hat, wird jetzt erkennen, daß die Skala CIF die folgerichtige Ergänzung des Skalensystems ist. Und wer die Vorteile der versetzten Skalen richtig ausnutzt, braucht die Skala CIF genau so oft wie die Skala CI, wenn er seine Einstellung mit den versetzten Skalen beginnt.

Um die günstigsten Einstellungen im Verlauf einer Rechnung zu erhalten, kann wechselseitig zwischen den Skalengruppen C/D/CI und DF/CF/CIF gewählt werden.

Beispiel: $\dfrac{15,3}{2,24 \cdot 5,3} = \dfrac{15,3}{2,24} \cdot \dfrac{1}{5,3} = 1,29$

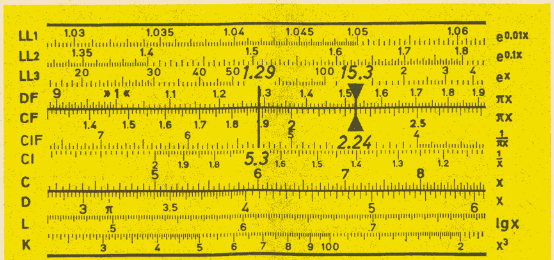


Abb. 20 Rechnung mit CF/DF/CIF

Nach der Division 15,3 : 2,24 wird 5,3 in Skala CIF mit dem Läufer eingestellt und das Ergebnis 1,29 in Skala DF abgelesen.

Beispiel: $1,5 \cdot 7,9 \cdot 1,69 = 20$

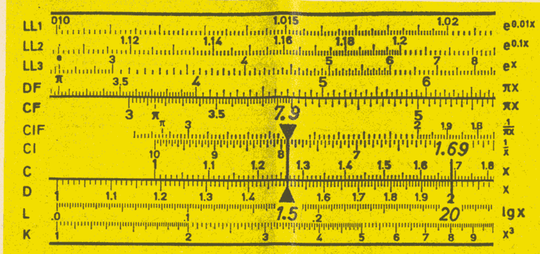


Abb. 21 Rechnung mit C/D/CI

Die erste Multiplikation $1,5 \cdot 7,9$ wird als Division mit den Skalen C und CI gerechnet, dann kann der dritte Faktor sofort in Skala C eingestellt und das Ergebnis in D abgelesen werden.

Steht im Verlauf einer Rechnung das Zwischenergebnis gegenüber der Zungeneins auf einer der Körperskalen und ist der nächste Schritt eine Multiplikation, wird mit den Skalen C und D oder CF und DF weitergerechnet; ist der nächste Schritt aber eine Division, werden die Skalen D und CI oder DF und CIF benutzt.

Befindet sich der Läufer über einem Zwischenergebnis auf einer der Körperskalen und ist der nächste Schritt eine Multiplikation, wird der nächste Faktor in CI oder CIF aufgesucht und unter den Läufer gebracht, um das Ergebnis unter einer Zungeneins ablesen zu können; ist aber der nächste Schritt eine Division, wird wie üblich mit den Skalen C oder CF dividiert, damit das Zwischenergebnis wieder gegenüber einer Zungeneins steht. In beiden Fällen ist die Zunge für den nächsten Rechenschritt richtig eingestellt und das Ziel der abwechselnden Division und Multiplikation erreicht.

Die wichtige Bedeutung der Kehrwertskalen liegt darin, daß durch die Einsparung von Einstellungen beim Rechnen Zeit gespart und die Rechengenauigkeit durch Verminderung der Fehlermöglichkeiten erhöht wird.

9. Proportionen

Proportionen lassen sich mit dem Rechenstab besonders einfach und übersichtlich rechnen. Man kann dabei die Trennungslinie zwischen dem Körper und der Zunge des Rechenstabes gleichsam als die Bruchstriche der Proportion auffassen. Alle Dreisatzaufgaben werden am besten als Proportion geschrieben.

Eine Aufgabe für die Abb. 22 wird das am besten zeigen. 9,5 kg einer Ware kosten DM 6,30, wieviel kosten 8,4 kg? Die Lösung mit dem Dreisatz lautet:

$$\frac{6,30}{9,50} \cdot 8,4 = 5,57$$

Übersichtlicher wird der Rechengang, wenn das Verhältnis der Gewichte und Preise als Proportion aufgestellt wird.

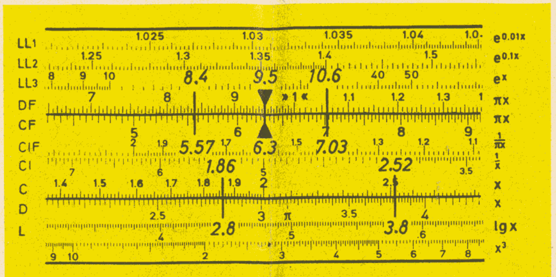


Abb. 22 Proportion $\frac{\text{kg}}{\text{DM}} = \frac{9{,}50}{6{,}30} = \frac{8{,}4}{?}$

Mit der Gegenüberstellung des gegebenen Gewichtes 9,5 in Skala DF und des Preises 6,30 in Skala CF stehen sich in den Skalen CF/DF und C/D alle Gewichte und Preise gegenüber, deren Verhältnis (Quotient) gleich dem eingestellten ist. In DF und D stehen laut der ersten Einstellung alle Gewichte, in Skala CF und C die dazugehörigen Preise. Gegenüber dem Gewicht 8,4 wird demzufolge der Preis 5,57 abgelesen. Weitere Gewicht-Preis-Relationen sind in der Abbildung eingezeichnet.

10,6 kg kosten DM 7,03 (in Skala CF/DF)
3,8 kg kosten DM 2,52 (in Skala C/D)
2,8 kg kosten DM 1,86 (in Skala C/D)
1 kg kostet DM 0,66

Die Proportion kann also beliebig fortgesetzt werden:

$$\frac{\text{kg}}{\text{DM}} = \frac{9{,}5}{6{,}3} = \frac{8{,}4}{5{,}57} = \frac{10{,}6}{7{,}03} = \frac{3{,}8}{2{,}52} = \frac{2{,}8}{1{,}86} = \frac{1}{0{,}66} = \ldots$$

Bei der Rechnung mit Proportionen werden wir weitgehend unabhängig von den bisherigen Regeln. Es bleibt sich gleich, wo und wie sich die kg-Werte und DM-Werte gegenüberstehen, entscheidend ist, daß die Gewichte dort aufgesucht werden, wo das erste Gewicht eingestellt wurde und daß die Preise entsprechend auf der gegenüberliegenden Skala abgelesen werden. Im obigen Beispiel könnten 6,3 in Skala DF und 9,5 in Skala CF eingestellt werden, dann müßte auch gegenüber 8,4 in CF das Ergebnis 5,57 in DF abgelesen werden.

Viele Aufgaben des Berufslebens lassen sich in der Proportionsform schreiben und damit für das Stabrechnen vereinfachen.

10. Die Quadratskalen A, B und BI

Wie die Skalen C und D sind auch die Skalen A und B zwei identische Skalen mit dem Unterschied, daß in ihnen zwei auf die Hälfte verkleinerte Grundskalen aneinandergereiht sind. Ihr linker Bereich ist von 1 bis 10 und der rechte von 10 bis 100 beziffert. Skala BI ist die Kehrwertskala zu B. Mit diesen drei Skalen können demzufolge alle bisher besprochenen Aufgaben in gleicher Weise gelöst werden, allerdings mit etwas geringerer Genauigkeit, weil für ihre Unterteilung nur die halbe Rechenstablänge zur Verfügung steht. Dafür haben die nebeneinander angeordneten Skalen den Vorteil, daß ein Durchschieben der Zunge grundsätzlich nicht vorkommt.

Die größere Bedeutung der Quadratskalen liegt jedoch darin, daß beim Übergang von D nach A, von C nach B und von CI nach BI Quadrate abgelesen und in der umgekehrten Richtung Quadratwurzeln gezogen werden können.

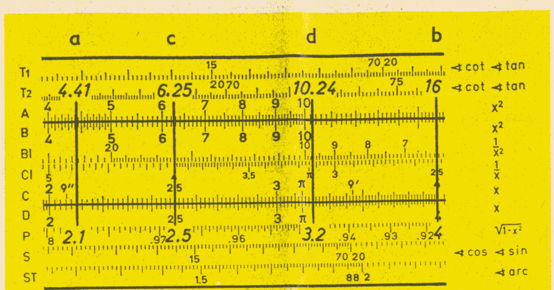


Abb. 23 a) $2{,}1^2 = 4{,}41$ b) $4^2 = 16$ c) $\sqrt{6{,}25} = 2{,}5$
d) $\sqrt{10{,}24} = 3{,}2$ (Einstellung im rechten Bereich)

Beim Rechnen mit den Quadratskalen ist es vorteilhaft, Zehnerpotenzen abzuspalten, um die Kommastellung bzw. die Einstellung im richtigen Bereich sicherzustellen. Es kommt immer darauf an, Zahlenwerte zu erhalten, deren Quadrate oder Quadratwurzeln leicht zu übersehen sind. Das geschieht am besten, indem wir uns die Bezifferung der Skalen zunutze machen und in D nur Werte von 1 bis 10, bzw. in A von 1 bis 100 einstellen. Deshalb werden alle anderen Zahlen auf solche Werte reduziert.

In den folgenden Beispielen führt die Abspaltung von Zehnerpotenzen zu den in Abb. 23 gezeigten Einstellungen.

a) $21^2 = (2{,}1 \cdot 10)^2 = 2{,}1^2 \cdot 100 = 441$

c) $0{,}025^2 = \left(\frac{2{,}5}{100}\right)^2 = \frac{6{,}25}{10000} = 0{,}000625$

d) $\sqrt{1024} = \sqrt{10{,}24 \cdot 100} = 10 \cdot 3{,}2 = 32$

$\sqrt{0{,}1024} = \sqrt{\frac{10{,}24}{100}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{10{,}24} = \frac{3{,}2}{10} = 0{,}32$

11. Die Kubikskala K

In der Skala K sind drei gleichlange Skalenabschnitte nebeneinander angeordnet, deren jeder daher nur den dritten Teil der Skalenlänge von D hat. Zu jedem in D eingestellten Wert zwischen 1 und 10 kann demzufolge in Skala K der entsprechende Kubikwert zwischen 1 und 1000 abgelesen werden. In der umgekehrten Richtung wird zu jedem in K eingestellten Wert die Kubikwurzel in D gefunden. Zur Ermittlung der Kommastellung oder zum richtigen Einstellen des Radikanden in Skala K ist es wieder zweckmäßig, Zehnerpotenzen abzuspalten.

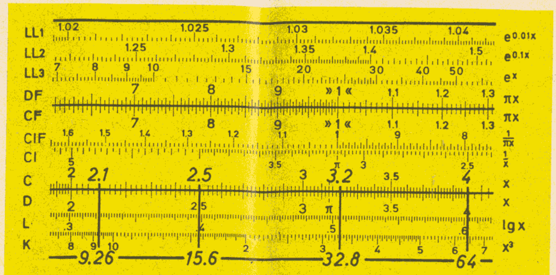


Abb. 24 a) $2{,}1^3 = 9{,}26$ b) $\sqrt[3]{64} = 4$

c) $2{,}5^3 = 15{,}6$ d) $\sqrt[3]{32.8} = 3{,}2$

Auch die folgenden Beispiele lassen sich in Abb. 24 ablesen:

a) $21^3 = (2{,}1 \cdot 10)^3 = 9{,}26 \cdot 1000 = 9260$

b) $0{,}4^3 = \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{64}{1000} = 0{,}064$

d) $\sqrt[3]{0{,}0328} = \sqrt[3]{\frac{32{,}8}{1000}} = \frac{3{,}2}{10} = 0{,}32$

12. Die pythagoreische Skala P

In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 1 gilt nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung $y = \sqrt{1 - x^2}$. Zu jeder Einstellung x in der Grundskala D wird in Skala P der Wert $y = \sqrt{1 - x^2}$ abgelesen. Umgekehrt kann aber auch x in Skala P eingestellt und y in Skala D abgelesen werden (Abb. 25).

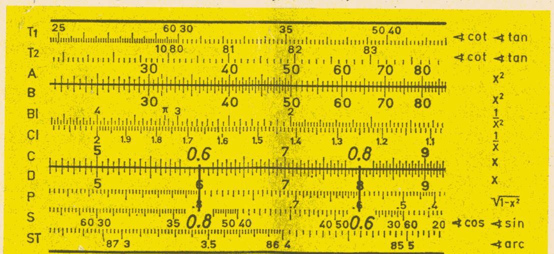


Abb. 25 $\sqrt{1-0{,}6^2} = 0{,}8$ $\sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6$

13. Die Skalen S, T1 und T2

Die Skalen S, T1 und T2 werden in Verbindung mit der Grundskala D zur Ermittlung der trigonometrischen Funktionswerte Sinus und Tangens benutzt. Wird ein Winkel mit dem Läufer in der Skala S, T1 oder T2 eingestellt, dann steht unter dem Läuferstrich in Skala D der Wert der entsprechenden trigonometrischen Funktion. Ebenso kann zu einem in Skala D eingestellten Funktionswert der zugehörige Winkel in den Skalen S, T1 und T2 abgelesen werden. Die Winkelbezifferung der dezimal unterteilten Skalen S, T1 und T2 gilt nur für die angeschriebenen Gradwerte.

Der Vorteil dieser Skalen liegt nicht allein im Aufsuchen von Funktionswerten, sondern auch darin, daß mit ihnen trigonometrische Rechnungen durchgeführt werden können, ohne daß die Funktionswerte selbst abgelesen werden müssen.

Zunächst sollen aber die Zusammenhänge anhand einiger Beispiele erläutert werden.

Wird der Läufer in Skala S auf den Winkel 37,4° gestellt, so ist damit sin 37,4° aufgesucht. Der Funktionswert 0,607 wird darüber in Skala D abgelesen (Abb. 26).

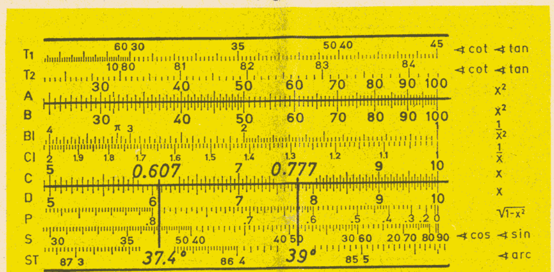


Abb. 26 sin 37,4° = 0,607 cos 39° = 0,777

Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Komplementwinkels.

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$$

Deshalb ist die Sinusskala auch eine Kosinusskala für Winkel, die mit Hilfe der rückläufigen roten Bezifferung eingestellt werden. Abb. 26 zeigt die Einstellung cos 39° = 0,777, die identisch mit sin (90° − 39°) = sin 51° ist. Alle Funktionswerte der in Skala S eingestellten Winkel liegen zwischen 0,1 und 1,0.

Mit der P-Skala können die Sinuswerte für Winkel $45° < \alpha < 84{,}3°$ und die Kosinuswerte für Winkel $45° > \alpha > 5{,}7°$ mit größerer Genauigkeit bestimmt werden als mit der Grundskala D.

Zu jedem in der Sinusskala eingestellten Winkel stehen sich die Funktionswerte des Sinus und Kosinus in den Skalen D und P gegenüber, weil $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ und $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ist. (Vgl. Kap. 12) Dadurch ist auch ein Übergang vom Sinus zum Kosinus ohne Ablesung des Winkels möglich.

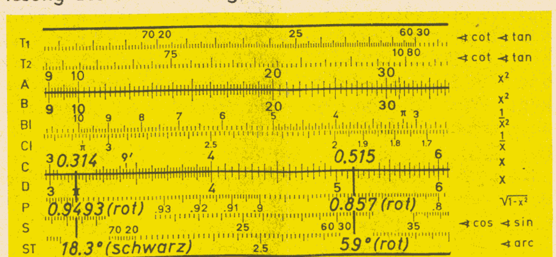


Abb. 27 a) sin 18,3° = 0,314 (D) c) sin 59° = 0,857 (P)
b) cos 18,3° = 0,9493 (P) d) cos 59° = 0,515 (D)

Für die Sinusfunktion gilt: Immer gleichfarbige Skalen einstellen und ablesen (s. Beispiel a und c in Abb. 27). Für die Kosinusfunktion gilt: Zu jeder Einstellung in der Skala S gehört die andersfarbige Ablesung in Skala D oder P (s. Beispiel b und d in Abb. 27).

Die Tangensskala ist zweiteilig, T1 reicht von 5,5° bis 45° und T2 von 45° bis 84,5°. Zu den in Skala T1 eingestellten Winkeln werden in Skala D die Funktionswerte 0,1 bis 1, zu den in Skala T2 eingestellten Winkeln die Funktionswerte 1 bis 10 abgelesen (s. Abb. 28).

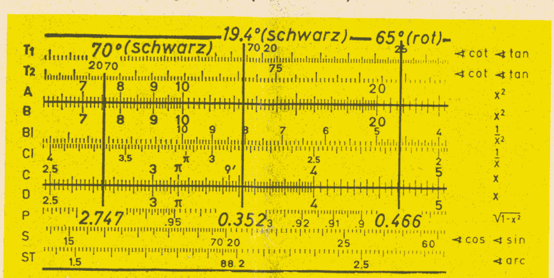


Abb. 28 tan 70° = 2,747 tan 19,4° = 0,352 cot 65° = 0,466

Die rote Bezifferung gilt für die Kofunktion Kotangens. Da der Kotangens der Kehrwert des Tangens ist, kann auch die Kehrwertskala CI zur Ablesung des Funktionswertes benutzt werden. In diesem Falle muß die Zunge in ihre Grundstellung gebracht werden.

14. Die Skala ST

Diese Skala ist eine Fortsetzung der Skalen S und T für Winkel, deren Funktionswerte zwischen 0,01 und 0,1 liegen, sie erfüllt aber gleichzeitig die wichtige Aufgabe der Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß.

14.1 Kleine Winkel — Große Winkel

Wenn $\sin\alpha$ und $\tan\alpha$ für $\alpha < 5{,}5°$ oder $\cos\alpha$ und $\cot\alpha$ für $\alpha > 84{,}5°$ gesucht sind, gilt die Näherung:

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \cos(90° - \alpha) \approx \cot(90° - \alpha) \approx \alpha \frac{\pi}{180}$$

Für Winkel bis zu 4° entspricht diese Näherung der Rechenstabgenauigkeit. Bei größeren Winkeln macht sich der Unterschied zwischen Sinus und Tangens bemerkbar, wie die Einstellung von sin 5,5° und tan 5,5° zeigt. Weil das Bogenmaß wertmäßig zwischen dem Sinus und Tangens liegt, ist die Skala ST im Bogenmaß geteilt, damit in Skala D ein mittlerer Wert abgelesen werden kann. Wird mit dem Läufer ein Winkel in ST eingestellt, beginnt sein Funktionswert in D mit 0,0 . . .

Die Einstellung der Winkel $84° < \alpha < 89{,}45°$ zur Ermittlung der Kofunktionen wird durch die rückläufige rote Bezifferung erleichtert.

Beispiele: sin 1° = 0,01745 cos 87° = 0,0523
tan 2° = 0,0349 cot 86,3° = 0,0646

Die Kosinuswerte für Winkel < 5,7° und entsprechend die Sinuswerte für Winkel > 84,3° können mit den Skalen S

und D nur ungenau ermittelt werden. Genauere Werte gibt die Näherung:

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad (\alpha \text{ im Bogenmaß})$$

$$\cos 1° \approx 1 - \frac{0{,}01745^2}{2} = 1 - 0{,}000152 = 0{,}999848.$$

Über der Winkeleinstellung in Skala ST steht in der Skala A bereits α^2 im Bogenmaß, dieser Wert wird mit Hilfe von B durch 2 geteilt. Für das Aufsuchen des Winkels zu einem Kosinuswert muß man den umgekehrten Weg gehen.

14.2 Die Umrechnung Gradmaß ⟷ Bogenmaß

Die Skala ST ist für das Bogenmaß berechnet und dezimal unterteilt, jedoch im Gradmaß beziffert. Da zu einem Zentriwinkel α der Bogen $\frac{\pi}{180} \cdot \alpha°$ gehört und 1° der Skala ST unter $\pi/180 = 0{,}01745$ der Skala D angeordnet ist, wird deutlich, daß die Skala ST eine um den konstanten Faktor $\pi/180$ versetzte Grundskala ist. Beim Übergang von ST nach D wird ein Gradmaß ins Bogenmaß und in der umgekehrten Richtung ein Bogenmaß ins Gradmaß umgerechnet. Diese Methode gilt nicht nur für die in Skala ST angegebenen Winkel, sondern auf Grund der dezimalen Gradeinteilung auch für alle Winkel. So kann die 1 in ST auch als 0,1°, 10° usw. gelesen werden und dementsprechend verschiebt sich das Komma beim Bogenmaß in D.

Beispiele: a) 0,1° = 0,001745 rad
b) 10° = 0,1745 rad
c) 100° = 1,745 rad

Da für sehr kleine Winkel die Näherung zwischen Sinus, Tangens und Bogenmaß immer besser wird, können alle Winkel, die kleiner sind als die in Skala ST angeschriebenen, nach der gleichen Methode gefunden werden.

$$\sin 5° \approx \tan 5° = 0{,}0873$$
$$\sin 0{,}5° \approx \tan 0{,}5° = 0{,}00873$$

Sind die kleinen Winkel in Minuten oder Sekunden angegeben, werden diese in Dezimalwerte eines Grades umgerechnet: $1' = 1°/60$ und $1'' = 1°/3600$ (siehe auch Kapitel 18.3).

14.3 Die Marken ϱ' und ϱ'' der Zungenskala C ermöglichen eine vereinfachte Umrechnung vom Gradmaß ins Bogenmaß, wenn die kleinen Winkel in Minuten oder Sekunden gegeben sind. Ihre Bedeutung ist:

$$\varrho' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 = 3438 \qquad \varrho'' = \frac{180}{\pi} \cdot 60 \cdot 60 = 206265$$

Damit genügt eine Division mit den Skalen C/D zur Umrechnung:

$$\alpha \text{ rad} \triangleq \frac{\alpha'}{\varrho'} = \frac{\alpha''}{\varrho''}$$

$$\text{z. B. } 22' \triangleq \frac{22'}{\varrho'} = 0{,}00640 \text{ rad}$$

Bei Benutzung dieser ϱ-Marken wird das Rechnen mit kleinen Winkeln oder Bögen für beliebige Radien sehr bequem.

$\alpha = \frac{b}{r} \cdot \varrho$, wenn der Winkel gesucht ist.

$b = \frac{\alpha \cdot r}{\varrho}$, wenn die Bogenlänge gesucht ist.

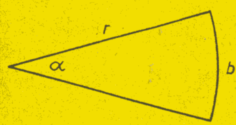


Abb. 29

15. Die trigonometrische Berechnung ebener Dreiecke

Der Sinussatz ist ein Musterbeispiel für eine Anwendung der Proportionsrechnung auf dem Rechenstab:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

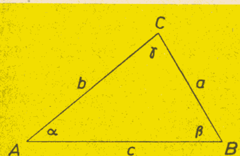


Abb. 30

Mit der Einstellung eines dieser Verhältnisse durch Gegenüberstellung der Strecke auf Skala C und des gegenüberliegenden Winkels auf Skala S sind auch die übrigen Verhältnisse eingestellt, so daß zu jeder Seite der gegenüberliegende Winkel und umgekehrt zu jedem Winkel die gegenüberliegende Seite abgelesen werden kann.

Am häufigsten kommt in der Praxis die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke vor. In diesem Sonderfall ist $\gamma = 90°$ und damit $\sin\gamma = 1$, sowie $\sin\alpha = \cos\beta$ und $\sin\beta = \cos\alpha$. Der Sinussatz lautet dann:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1}$$

$$= \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Ferner ist: $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

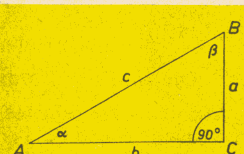


Abb. 31

Je nach den gegebenen Stücken kommen zwei grundsätzliche Rechenoperationen vor:

1. Gegeben sind zwei beliebige Stücke (außer Fall 2).
2. Gegeben sind die Katheten a und b.

Beispiel zu 1: Gegeben: $c = 5$, $a = 3$
Gesucht: α, β, b Man beachte: $\beta = 90° - \alpha$

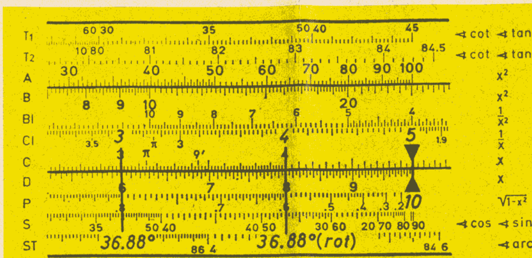


Abb. 32 Die Hypotenuse ist gegeben

Mit $c = 5$ in Skala C über 10 in Skala D beginnen; gegenüber der Kathete 3 in C steht dann der zugehörige Winkel $\alpha = 36{,}88°$ in Skala S. Zunge unverändert stehen lassen und den Läufer auf 36,88° der roten Bezifferung der Skala S stellen. Dann ist die dem Winkel β gegenüberliegende Seite $b = 4$ in C abzulesen. Entsprechend verfährt man, wenn eine Kathete und ein Winkel gegeben sind, indem man das Sinusverhältnis aus der Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel mit den Skalen S und C einstellt. Gelegentlich ist es vorteilhafter, mit der Skala CF an Stelle von C zu rechnen, um das Durchschieben der Zunge zu vermeiden.

Beispiel zu 2: Gegeben: $a = 3$, $b = 6$

Gesucht: α, β, c $\tan\alpha = \frac{3}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6}$

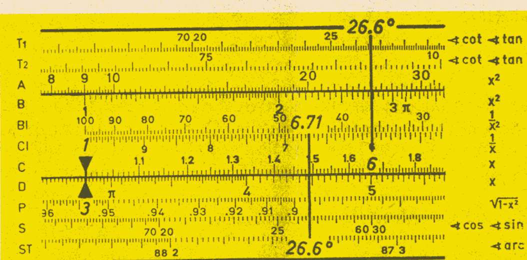


Abb. 33 Die Katheten sind gegeben

Man stellt die 1 der Skala C über die kleinere Kathete 3 und findet $\alpha = 26{,}6°$ auf Skala T1 über der 6 von Skala CI. Wird bei gleicher Zungeneinstellung der Läufer über 26,6° in Skala S gestellt, steht das Ergebnis $c = 6{,}71$ in Skala CI, denn aus $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ folgt die Proportion

$$\frac{a}{1} = \frac{\sin\alpha}{1/c}. \qquad \beta = 90° - 26{,}6° = 63{,}4°$$

Wenn $a > b$, also $\alpha > 45°$ ist, wird der Winkel nicht auf Skala T1, sondern auf Skala T2 abgelesen. Der weitere Rechengang ist derselbe wie in dem zuvor beschriebenen Beispiel.

Diese zwei angeführten Rechenarten für das rechtwinklige Dreieck haben besondere Bedeutung bei Koordinaten- und Vektorrechnungen sowie bei Rechnungen mit komplexen Zahlen. Es handelt sich bei derartigen Aufgaben stets um die Verwandlung von rechtwinkligen Koordinaten in Polarkoordinaten oder um die umgekehrte Aufgabe.

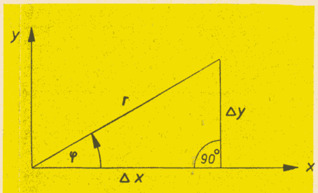


Abb. 34 $\Delta x,\ \Delta y \longleftrightarrow r, \underline{/\varphi}$

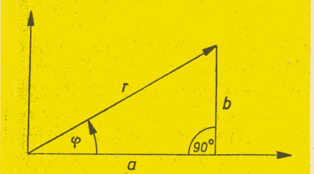


Abb. 35 $Z = a + ib = r\underline{/\varphi}$

Komplexe Zahlen lassen sich in der Komponentenform $Z = a + i\,b$ leicht addieren oder subtrahieren, in der Vektorform

$$Z = r \cdot e^{i\varphi} = r\underline{/\varphi}$$

dagegen multiplizieren, dividieren und potenzieren. Aus diesem Grunde muß die Umrechnung von der einen Form in die andere häufig durchgeführt werden.

Beispiele: $Z = 4{,}5 + i\,1{,}3 = 4{,}68\underline{/16{,}13^\circ}$
$Z = 6{,}7\underline{/49^\circ} = 4{,}39 + i\,5{,}05$

Der Rechengang ergibt sich aus den vorstehenden Erläuterungen über das rechtwinklige Dreieck und aus Abb. 35.

16. Die Mantissenskala L

Die Skala L gibt wie eine Logarithmen-Tafel nur die Mantissen an, wenn der Numerus in Skala D eingestellt wird (siehe Abb. 36).

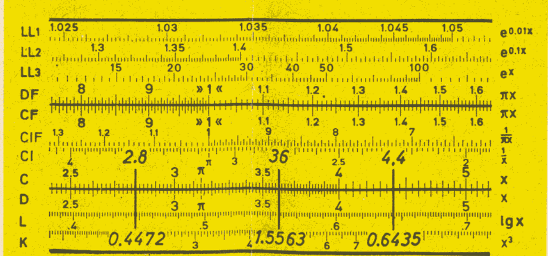


Abb. 36 Dekadische Logarithmen
lg 2,8 = 0.4472 lg 36 = 1.5563
num 0.6435 = 4.4

17. Die Skalen LL1, LL2 und LL3

Die dreiteilige Exponentialskala e^x mit den Teilstücken LL1, LL2 und LL3 ist doppeltlogarithmisch geteilt und auf Skala D bezogen. Die an sich durchlaufende Teilung mit dem Bereich von 1,01 bis 10^5 ist so zerlegt, daß die Zahl e = 2,718 mit dem Anfang bzw. Ende der Skala D korrespondiert. Die Ablesungen auf dieser Skala sind eindeutig, d. h. der Wert 1,35 bedeutet nicht gleichzeitig 13,5 oder 135 usw., wie auf den Grundskalen. Auch in den LL-Skalen kommen nur die drei in den Abb. 5 bis 7 dargestellten Unterteilungen vor, jedoch der Charakter dieser Skalen ist ein ganz anderer als in den Grundskalen. Deshalb wird empfohlen, die Bezifferung und Unterteilung vor der Benutzung dieser Skalen genau zu studieren, besonders in LL1 wegen der vielen ablesbaren Dezimalstellen und im rechten Teil der Skala LL3 wegen des häufigen Wechsels in der Unterteilung.

Ein weiteres Charakteristikum dieser Skala ist, daß beim Übergang von einer Teilskala zur benachbarten die zehnte Potenz oder die zehnte Wurzel gerechnet wird, was durch die mathematischen Symbole e^x, $e^{0{,}1x}$ und $e^{0{,}01x}$ am rechten Skalenrand zum Ausdruck kommt.

Mit diesen Exponentialskalen wird erreicht, daß die Aufgaben der Potenzbildung und des Wurzelziehens auf eine Addition bzw. Subtraktion von Strecken zurückgeführt werden und daß innerhalb des gegebenen Bereichs beliebige Potenzen, Wurzeln und Logarithmen gerechnet werden können.

17.1 Potenzen $y = a^x$

Analog zur Multiplikation mit den Grundskalen wird mit den Körperskalen LL und mit der Zungenskala C potenziert.

Rechengang:

a) Läufer auf den Basiswert a in der entsprechenden LL-Skala stellen.

b) Anfang oder Ende der Skala C unter den Läuferstrich bringen.

c) Einstellen des Exponenten x auf Skala C durch Verschieben des Läufers.

d) Ablesen des Potenzwertes y unter dem Läuferstrich auf der richtigen LL-Skala (vgl. Ableseregeln!).

Mit der Einstellung des Basiswertes entsteht eine Tabellenstellung für die Funktion $y = a^x$. Abb. 37 zeigt die Zungeneinstellung für die Funktion $y = 3{,}2^x$. Für verschiedene Läuferstellungen sind die in C eingestellten Exponenten und die dazugehörenden Ablesungen in den LL-Skalen angeschrieben. Über dem Exponenten 1,9 sind auch die Ergebnisse für die Variationen 0,19 und 0,019 des Exponenten gezeigt.

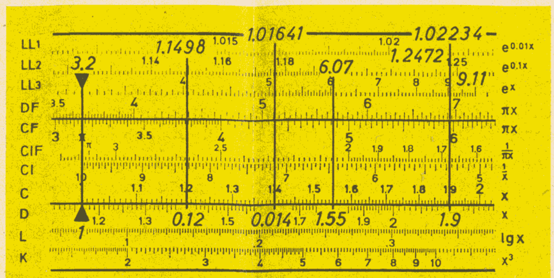


Abb. 37 $3{,}2^{1{,}9} = 9{,}11$ $\quad$ $3{,}2^{1{,}55} = 6{,}07$

$3{,}2^{0{,}19} = 1{,}2472$ $\quad$ $3{,}2^{0{,}12} = 1{,}1498$

$3{,}2^{0{,}019} = 1{,}02234$ $\quad$ $3{,}2^{0{,}014} = 1{,}01641$

Ableseregeln:

a) Bei der Variation der Kommastellung im Exponenten um eine Stelle nach links erfolgt die Ablesung auf der nächsthöhergelegenen LL-Skala und umgekehrt bei der Variation um eine Kommastellung nach rechts auf der nächsttieferen Nachbarskala.

b) Erfolgt die Basiseinstellung mit dem Endstrich 10 der Grundskala C müssen die Ablesungen auf der nächsttieferen LL-Skala vorgenommen werden im Vergleich zu einer mit dem Anfangsstrich 1 begonnenen Rechnung, weil das Ergebnis der Potenz nicht kleiner sein kann als die Basis, solange der Exponent > 1 ist.

Gelegentlich kann es vorteilhaft sein, anstelle von Skala C die Skala CF zu benutzen, um bei der Aufstellung einer Potenztabelle das Durchschieben der Zunge einzusparen.

$y = a^{-x}$ ist der reziproke Wert von $y = a^x$ und wird durch Umrechnung mit Skala CI gefunden.

$$3{,}2^{-1{,}9} = \frac{1}{3{,}2^{1{,}9}} = \frac{1}{9{,}11} = 0{,}1098$$

Basiswerte < 1 können nicht eingestellt werden. Deshalb wird wieder der Kehrwert gebildet, um Werte > 1 zu erhalten, die mit dem Rechenstab potenziert werden können. Von der Potenz ist anschließend der Kehrwert zu bilden.

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$$

An Stelle von $0{,}5^{2{,}1}$ wird $\frac{1}{2^{2{,}1}} = \frac{1}{4{,}28} = 0{,}233$ gerechnet.

Reicht das Ergebnis einer Potenz über den Bereich der Exponentialskalen hinaus, muß der Exponent in Summanden und somit die Potenz in Faktoren zerlegt werden.

Beispiel:

$$3{,}14^{19} = 3{,}14^{6+6+7} = (3{,}14^6)^2 \cdot 3{,}14^7$$
$$= 0{,}955^2 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^3 = 2{,}76 \cdot 10^9$$

Für negative Exponenten gilt selbstverständlich derselbe Lösungsweg.

17.2 Potenzen $y = e^x$

Da die Marke für $e = 2{,}718$ der 1 von Skala D gegenüberliegt, besteht eine feste Basiseinstellung für alle Potenzen der Basis e.

Für die Berechnung von $e^{1{,}4}$ wird der Läufer auf 1,4 in D gestellt und darüber in LL3 das Ergebnis 4,06 abgelesen.

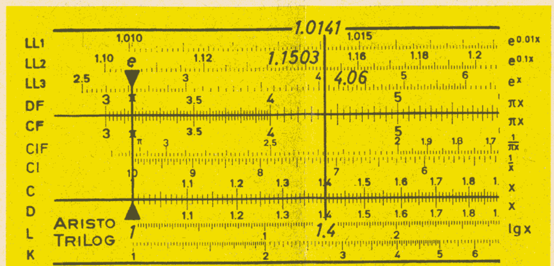


Abb. 38 $e^{1{,}4} = 4{,}06$, $e^{0{,}14} = 1{,}1503$, $e^{0{,}014} = 1{,}0141$

17.3 Wurzeln $y = \sqrt[x]{a}$

Das Radizieren ist die Umkehrung des Potenzierens, wie die Division die Umkehrung der Multiplikation ist. Deshalb ist der Rechengang auch der Division vergleichbar, denn es werden gleichfalls zwei Strecken subtrahiert. Wenn die Potenz $3^2 = 9$ gemäß Kap. 17.1 eingestellt wird, kann in der umgekehrten Richtung $\sqrt[2]{9} = 3$ abgelesen werden.

Rechengang:

a) Gegenüberstellung des Radikanden a auf der LL-Skala und des Wurzelexponenten x auf der Zungenskala C.

b) Ablesung des Wurzelwertes y über dem Zungenanfang oder Zungenende auf der entsprechenden LL-Skala.

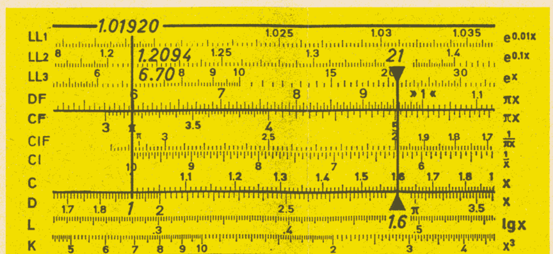


Abb. 39 Ablesung über dem Zungenanfang

$\sqrt[1{,}6]{21} = 6{,}70$ (LL3) $\quad$ $\sqrt[16]{21} = 1{,}2094$ (LL2) $\quad$ $\sqrt[160]{21} = 1{,}01920$ (LL3)

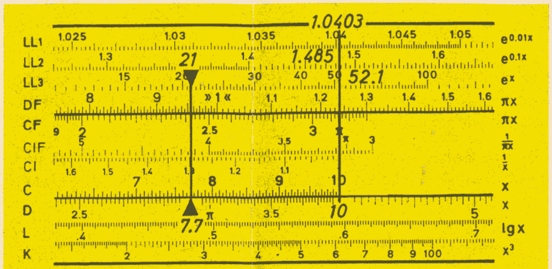


Abb. 40 Ablesung über dem Zungenende

$\sqrt[7,7]{21} = 1{,}485$ $\sqrt[0,77]{21} = 52{,}1$ $\sqrt[77]{21} = 1{,}0403$

Ableseregeln:

a) Bei der Variation des Wurzelexponenten um eine Kommastelle nach rechts erfolgt die Ablesung auf der nächsthöheren LL-Skala und bei der Versetzung des Kommas um eine Stelle nach links auf der nächsttieferen LL-Skala.

b) Ein über der 10 von Skala C abzulesendes Ergebnis muß im Vergleich zu einem über der 1 liegenden immer in der höhergelegenen Nachbarskala abgelesen werden, weil die Wurzel aus einer Zahl nicht größer sein kann als die Zahl selbst, solange der Wurzelexponent > 1 ist.

Wurzeln lassen sich auch als Potenzen schreiben: $\sqrt[3,5]{2{,}9} = 2{,}9^{\frac{1}{3,5}} = 1{,}356$. In diesem Falle wird nach den Regeln von Ziffer 17.1 potenziert, aber mit dem Unterschied, daß der Exponent nicht in Skala C, sondern in Skala CI eingestellt wird. Das Ergebnis steht in LL2. Zur Berechnung der Beispiele von Abb. 39 und 40 genügt eine Zungeneinstellung, wenn CIF benutzt wird.

17.4 Logarithmen

Logarithmen einer beliebigen Basis werden als Umkehrung des Potenzierens abgelesen.

$$y = a^x \qquad x = \log_a y$$

Die Berechnung des Logarithmus ist identisch mit einer Potenzaufgabe, bei welcher der Exponent gesucht ist.

Rechengang:

a) Einstellen des Basiswertes mit dem Läufer auf LL.

b) Zungenanfang oder Zungenende unter den Läuferstrich bringen.

c) Verschieben des Läufers zum Numerus y in Skala LL.

d) Ablesen des Logarithmus in Skala C.

Die Zungeneins wird unter 5 in Skala LL3 gebracht, dann wird unter 20 in Skala LL3 der Logarithmus 1,86 in C abgelesen.

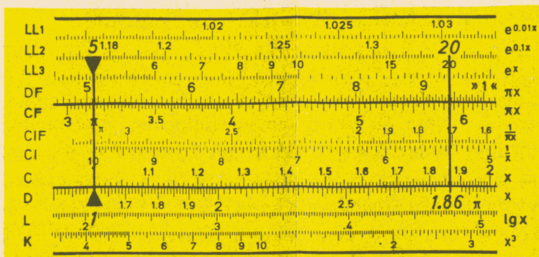


Abb. 41 $\log_5 20 = 1{,}86$

Mit den Skalen LL und D ist eine Tabellenstellung der natürlichen Logarithmen gegeben. Gegenüber jedem Numerus in Skala LL steht der Logarithmus in Skala D.

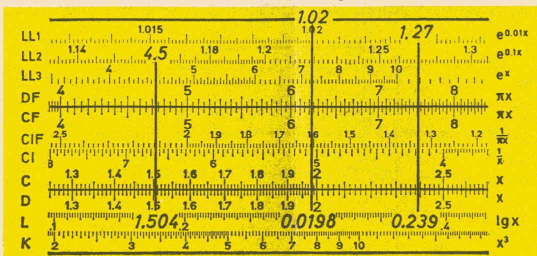


Abb. 42 ln 4,5 = 1,504 ln 1,27 = 0,239 ln 1,02 = 0,0198

Wird die Basis 10 mit der Zungeneins eingestellt, besteht zwischen den Skalen LL und C eine Tabellenstellung der dekadischen Logarithmen. Bringen wir bei dieser Zungeneinstellung den Läufer auf den Wert 2 in Skala C, dann erhalten wir eine einfache Gedächtnisstütze für das Rechnen mit den Exponentialskalen, denn wir können ablesen:

$$10^2 = 100, \quad \sqrt[2]{100} = 10 \quad \text{und} \quad \log_{10} 100 = 2$$

Da wir diese Zusammenhänge grundsätzlich auswendig wissen, können wir die Rechenregeln leicht rekonstruieren.

18. Der Läufer

Auf dem Läufer sind einige kurze Striche angebracht, die bei speziellen Aufgaben Einstellungen ersparen.

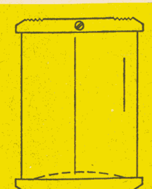


Abb. 43

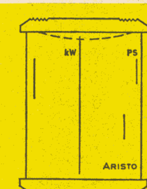


Abb. 44

18.1 Kreisflächen, Gewicht von Flußstahl

Die kurzen Läuferstriche links oben und rechts unten (Abb. 44) werden in Verbindung mit dem Hauptstrich des Läufers zur Berechnung von Kreisflächen (Querschnitten) benutzt. Diese Strichmarken vereinfachen Rechnungen mit dem Faktor $\pi/4 = 0{,}785$ in der Formel $F = d^2 \cdot \pi/4$.

Nach der Einstellung des Hauptstriches über den Durchmesser d in der Grundskala kann darüber in der Quadratskala d^2 und unter dem linken Läuferstrich $F = d^2 \cdot \pi/4$ abgelesen werden. In der umgekehrten Reihenfolge finden wir den Durchmesser einer gegebenen Kreisfläche. Man kann auch d mit dem rechten Strich in D einstellen und F unter dem Hauptstrich in A ablesen.

Der gleiche Faktor gilt zufällig auch für das spezifische Gewicht von Flußstahl ($\gamma = 7{,}85\ g/cm^3$), so daß die Gewichtsberechnungen von Stahlstangen vereinfacht werden.

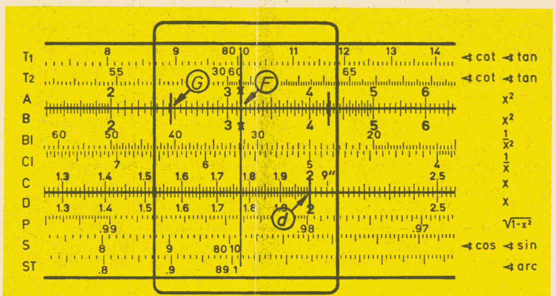


Abb. 45 Beispiel für d = 2 cm

Kreisdurchmesser d = 2 cm (Einstellung). Kreisfläche $F = 3{,}14\ cm^2$ (Ablesung). Ein Stück Flußstahl von der Längeneinheit 1 cm wiegt dann G = 24,7 g (Abb. 45). Stellt man den Zungenanfang unter den linken Läuferstrich, so kann durch Multiplikation mit Skala B das Gewicht für jede Länge in Skala A abgelesen werden.

18.2 Die Umrechnung kW ⟷ PS

Der Abstand zwischen dem Mittelstrich und der rechten oberen Marke gibt in den Quadratskalen den Faktor für die Umwandlung von kW in PS und umgekehrt an.
Stellt man z. B. den Mittelstrich auf 19.5 kW, so gibt die obere rechte Marke 26,5 PS an. Die Einstellung von 7 PS mit der rechten Marke liefert am Mittelstrich 5,15 kW.

18.3 Die Marke 36

Die kurze Läufermarke über den Skalen CF und DF (Abb. 43) liefert beim Übergang von Skala D nach DF bzw. von C nach CF den Faktor 36. In der umgekehrten Ableserichtung wird durch 36 geteilt. Beispiele:

1 Stunde	= 3600 Sekunden	1°	= 3600″
1 m/s	= 3,6 km/h	1 Jahr	= 360 Tage
1 kWh	$= 3{,}6 \cdot 10^6$ J	$\varkappa_{Al}$	$= 36\ \dfrac{m}{\Omega\ mm^2}$

18.4 Abnehmen und Aufsetzen des Läufers

Zum Abnehmen wird der Läufer fest mit einer Hand an der Läuferleiste mit der Schraube angefaßt. Die Läuferleiste ohne Schraube löst sich aus der Rastung der Läufergläser durch Verdrehen der anderen Läuferleiste quer zum Rechenstab (Abb. 46). Die Läufergläser und die Läuferleiste können dann abgezogen werden. Die Justierung der Läufergläser bleibt dabei erhalten, solange die Schraube an der Läuferleiste nicht gelöst wird. Beim Aufsetzen des Läufers ist darauf zu achten, daß die Läufermarken für kW und PS über den Skalen A und B liegen müssen. Die Läuferleiste mit der Feder wird dann auf die Läufergläser gesetzt und unter leichtem Druck zum Einrasten gebracht.

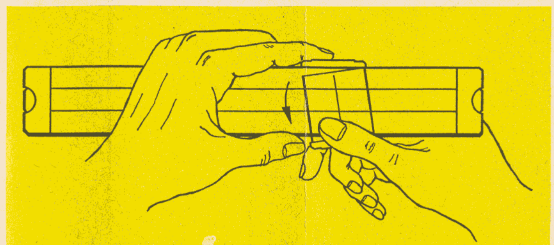


Abb. 46

18.5 Justierung des Läufers

Nach Lockerung der Justierschraube des Läufers wird der Rechenstab umgedreht, damit der Läuferstrich nach den Skalenenden von T1 und S ausgerichtet werden kann. Ohne den Läufer zu verschieben, wird der Rechenstab gewendet und auf den Tisch gelegt, um die andere Läuferseite nach der e-Marke in Skala LL2 und dem Endstrich der Skala K auszurichten. Dann wird die Schraube wieder festgezogen.

19. Behandlung des ARISTO-Rechenstabes

Der Rechenstab ist ein wertvolles Rechenhilfsmittel und braucht eine pflegliche Behandlung. Die Skalen und der Läufer sind vor Verschmutzung und Kratzern zu schützen, damit die Ablesegenauigkeit nicht beeinträchtigt wird.

Es empfiehlt sich, den Rechenstab von Zeit zu Zeit mit dem Spezialreinigungsmittel DEPAROL zu reinigen. Keinesfalls dürfen irgendwelche Chemikalien verwendet werden, da diese die Teilung zerstören können.

Der Rechenstab ist vor Plastik-Radierern und ihren Abriebprodukten zu schützen, da diese die Oberfläche des ARISTOPAL beschädigen. Ferner ist eine Lagerung an heißen Plätzen, z.B. auf Heizkörpern oder in praller Sonne, zu vermeiden, da bei höheren Hitzegraden als etwa 60° C Verformungen auftreten. Für derartig beschädigte Rechenstäbe wird kein Ersatz geleistet.